从平面类比到空间

■安徽省太湖中学　李昭平

“将平面图形的性质类比到空间，探求相应的空间图形是否也有此类似的性质”，这是近几年高考考查立体几何出现的一种新题型. 这种问题往往以平面图形的性质及其证法为基础，融探索、猜想、证明于一体，能有效考查考生的空间想象能力、类比联想能力、合情推理能力以及创新能力，充分体现了新课改理念. 兹举几例，供参考.

1. 从平面余弦定理类比出空间余弦定理

例 1. 如图 1，点 P 为斜三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的侧棱 BB_1 上一点，$PM\perp BB_1$ 交 AA_1 于点 M，$PN\perp BB_1$ 交 CC_1 于点 N.

（1）求证：$CC_1\perp MN$；（2）在任意三角形 DEF 中有余弦定理 $DE^2=DF^2+EF^2-2\cdot DF\cdot EF\cos\angle DEF$ 拓展到空间，类比三角形的余弦定理，写出斜三棱柱的三个侧面面积与其中两个侧面所成二面角之间的关系式，并予以证明.

思路：将三角形的边与角分别类比斜三棱柱的侧面和二面角.

解析：（1）很容易证明，略去.

（2）斜三棱柱的余弦定理：在斜三棱柱中，任一侧面面积的平方等于其它两个侧面面积的平方和减去这两个侧面面积与它们所成的二面角的余弦的积的 2 倍.

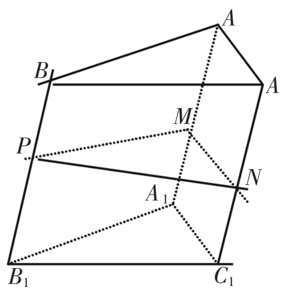

图 1

事实上：如图 1，设斜三棱柱的侧棱长为 m，$\angle MNP$ 是二面角 $B—CC_1—A$ 的平面角.在 ΔPMN 中，$\because PM^2=PN^2+MN^2-2PN\cdot MN\cdot\cos\angle MNP$,

$\therefore(m\cdot PM)^2=(m\cdot PN)^2+(m\cdot MN)^2-2(m\cdot PN)(m\cdot MN)\cdot\cos\angle MNP$,

即$S^2_{AB_1}=S^2_{BC_1}+S^2_{CA_1}-2S_{BC_1}\cdot S_{CA_1}\cdot\cos\angle MNP$.同理可证另外两个等式.

针对训练 1：在上述问题中，若已知条件不变，又可以类比得到，斜三棱柱的正弦定理，请写出结论，并证明.

2. 从平面勾股定理类比出空间勾股定理

例 2. 在平面几何里，有勾股定理：“设△ABC 的两边 AB、AC 互相垂直，则 $AB^2+AC^2=BC^2$.”拓展到空间，类比平面几何的勾股定理，研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系，可以得出的正确结论是：“设三棱锥 $A—BCD$ 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两相互垂直，则 ___________.

思路：边垂直类比到面垂直，边的平方关系类比到面的面积平方关系.

解析：如图 2，由题意，得 $PA\perp$面 PBC.

作 $AE\perp BC$ 于 E，连结 AE，则 $PE\perp BC$，$PE\perp PA$.

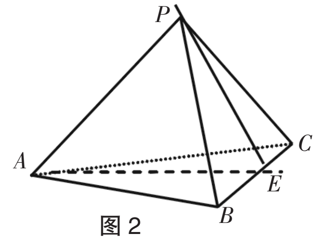

图 2

于是 $S^2_{\Delta PAB}+S^2_{\Delta PBC}+S^2_{\Delta PCA}=\frac{1}{4}PA^2\cdot PB^2+\frac{1}{4}PE^2\cdot BC^2+\frac{1}{4}PA^2\cdot PC^2=\frac{1}{4}PE^2\cdot BC^2+\frac{1}{4}PA^2(PC^2+PB^2)=\frac{1}{4}PE^2\cdot BC^2+\frac{1}{4}PA^2\cdot BC^2=\frac{1}{4}BC^2(PE^2+PA^2)=\frac{1}{4}BC^2\cdot AE^2=(\frac{1}{2}BC\cdot AE)^2=S^2_{\Delta ABC}$.

故 $S^2_{\Delta PAB}+S^2_{\Delta PBC}+S^2_{\Delta PCA}=S^2_{\Delta ABC}$ (空间勾股定理) .

针对训练 2：在 RtΔABC 中，两直角边分别为 a、b，h 为斜边上的高，则有 $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.由此类比：若三棱锥 S–ABC 中的三条侧棱 SA、SB、SC 两两垂直，且长度分别为 a、b、c，棱锥底面 ABC 上的高为 h，则有____________.

3. 从平面重心定理类比出空间重心定理

例 3. 我们知道：在平面几何中，△ABC 的三条中线相交于一点，这个点叫三角形的重心，并且重心分中线之比为 2:1（从顶点到对边中点）. 据此，我们拓展到空间：把空间四面体的顶点与对面三角形的重心的连线叫空间四面体的中轴线，则四条中轴线相交于一点，这点叫此四面体的重心.

类比上述命题，请写出四面体重心的类似性质，并证明.

思路：将三角形边的中点类比到四面体面的重心，将三角形重心性质的证明方法类比到空间四面体中，利用相似三角形对应边成比例.

解析：四面体重心的性质:空间四面体的重心分顶点与对面三角形的重心的连线之比为 3:1（从顶点到对面三角形的重心）.

事实上：如图 3，AE，BP 为四面体的中轴线，P，E 分别为 ΔACD，ΔBCD 的重心，连结 BE，AP 并延长，交 CD 于点 F 再连结 PE.

因为 $AP:PF=2:1,BE:EF=2:1$,所以 $AP:PF=BE:EF,PE//AB$,

因此 $AG:GE=BG:GP=PE:AB=3:1$.

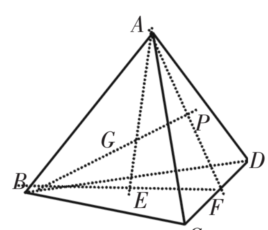

图 3

针对训练 3：在平面几何中，ΔABC 的$\angle C$ 的内角平分线 CE 分 AB 所成线段的比为 $\frac{AC}{BC}=$